

**Математический бой**

1. На доске  $100 \times 100$  лежит 800 фигурок Г-тетрамино так, что они не перекрываются, и любая такая фигурка занимает ровно 4 клетки доски (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Докажите, что на доску можно положить ещё хотя бы одну фигурку Г-тетрамино так, чтобы они все ещё не перекрывались.

2. В ряд расположено 100 монет. Изначально первые 50 монет лежат орлом вверх, а остальные – решкой. Аня и Ваня ходят по очереди, начинает Аня. За один ход Аня может выбрать две соседние монеты, одна из которых лежит орлом вверх, а другая – решкой, и перевернуть обе эти монеты. Ваня за свой ход может выбрать две соседние монеты, обе лежащие орлом вверх или обе лежащие решкой вверх, и перевернуть их. Если какой-то из игроков не может сделать свой ход, игра заканчивается. Ваня хочет, чтобы в какой-нибудь момент все монеты оказались решкой вверх. Может ли он играть так, чтобы гарантированно добиться желаемого?

3. На вечеринке присутствовали 2021 человек, некоторые из них являются друзьями. Назовём популярностью человека размер наибольшей группы людей, в которую он входит, такой, что любые двое из этой группы дружат между собой. Если у человека нет друзей на вечеринке, его популярность равна единице. Какое наибольшее число различных популярностей может быть у присутствующих на вечеринке?

4. Пусть  $p_1$  ( $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 5$ ,  $p_3 = 7$  и т.д.), и  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{100}$ . Докажите, что среди чисел от 1 до  $N$  ровно  $\frac{N-1}{2}$  чисел имеют нечётное число различных простых делителей, не превосходящих  $p_{100}$ .

5. Вася выбрал 800 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, и расставил их по кругу. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых не делится на следующее по часовой стрелке число.

6. У Оли есть  $n$  гирек, масса каждой из которых натуральное число граммов, а суммарная масса – 2021 грамм. При каком наименьшем  $n$  гирьки обязательно можно разбить на несколько групп с равными массами?

7. В Азкабана 2021 камера. Камеры расположены в ряд  $1 \times 2021$ . В первой (самой левой) камере сидят 100 узников, а в оставшихся камерах – по одному узнику. Узники хотят сбежать из Азкабана и для этого ломают стены между камерами, а из последней камеры (самой правой) – стену наружу. Ровно в полночь каждый узник начинает ломать стену между камерой, в которой он находится, и следующей за ней справа камерой. А узник в самой правой камере ломает стену наружу. Если узники сломали стену, то они мгновенно перемещаются в следующую камеру и начинают ломать стену там. Все узники работают с постоянной скоростью 1 стена в час. Все узники оказались на свободе через  $\frac{m}{n}$  часов. Найдите  $m + n$ , если известно, что дробь  $\frac{m}{n}$  несократима.

8. На доске написано 10-значное число. За одну операцию число на доске умножают на 6 и стирают его первую цифру. Через несколько операций на доске оказалось число, равное исходному. Докажите, что оно делится на 1024.

## Математический бой

1. На доске  $100 \times 100$  лежит 800 фигурок Г-тетрамино так, что они не перекрываются, и любая такая фигурка занимает ровно 4 клетки доски (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Докажите, что на доску можно положить ещё хотя бы одну фигурку Г-тетрамино так, чтобы они все ещё не перекрывались.

2. В ряд расположено 100 монет. Изначально первые 50 монет лежат орлом вверх, а остальные – решкой. Аня и Ваня ходят по очереди, начинает Аня. За один ход Аня может выбрать две соседние монеты, одна из которых лежит орлом вверх, а другая – решкой, и перевернуть обе эти монеты. Ваня за свой ход может выбрать две соседние монеты, обе лежащие орлом вверх или обе лежащие решкой вверх, и перевернуть их. Если какой-то из игроков не может сделать свой ход, игра заканчивается. Ваня хочет, чтобы в какой-нибудь момент все монеты оказались решкой вверх. Может ли он играть так, чтобы гарантированно добиться желаемого?

3. На вечеринке присутствовали 2021 человек, некоторые из них являются друзьями. Назовём популярностью человека размер наибольшей группы людей, в которую он входит, такой, что любые двое из этой группы дружат между собой. Если у человека нет друзей на вечеринке, его популярность равна единице. Какое наибольшее число различных популярностей может быть у присутствующих на вечеринке?

4. Пусть  $p_1$  ( $p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7$  и т.д.), и  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{100}$ . Докажите, что среди чисел от 1 до  $N$  ровно  $\frac{N-1}{2}$  чисел имеют нечётное число различных простых делителей, не превосходящих  $p_{100}$ .

5. Вася выбрал 800 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, и расставил их по кругу. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых не делится на следующее по часовой стрелке число.

6. У Оли есть  $n$  гирек, масса каждой из которых натуральное число граммов, а суммарная масса – 2021 грамм. При каком наименьшем  $n$  гирьки обязательно можно разбить на несколько групп с равными массами?

7. В Азкабанае 2021 камера. Камеры расположены в ряд  $1 \times 2021$ . В первой (самой левой) камере сидят 100 узников, а в оставшихся камерах – по одному узнику. Узники хотят сбежать из Азкабана и для этого ломают стены между камерами, а из последней камеры (самой правой) – стену наружу. Ровно в полночь каждый узник начинает ломать стену между камерой, в которой он находится, и следующей за ней справа камерой. А узник в самой правой камере ломает стену наружу. Если узники сломали стену, то они мгновенно перемещаются в следующую камеру и начинают ломать стену там. Все узники работают с постоянной скоростью 1 стена в час. Все узники оказались на свободе через  $\frac{m}{n}$  часов. Найдите  $m + n$ , если известно, что дробь  $\frac{m}{n}$  несократима.

8. На доске написано 10-значное число. За одну операцию число на доске умножают на 6 и стирают его первую цифру. Через несколько операций на доске оказалось число, равное исходному. Докажите, что оно делится на 1024.